Exercice 3 — 25 min — 5 pt

1°) Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par : $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer trois réels *a*, *b* et *c* tels que : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

b) En déduire la primitive F_0 de g sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et qui s'annule en 1.

2°) a) À l'aide d'une intégration par parties calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de $f:x\mapsto x\cos 2x$ sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

b) Soit **C** la courbe de *f* dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1cm)

Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $f(x)\geq 0$ puis calculer l'aire de la région limitée par **C** et les droites d'équations $y=0$, $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 4 — 35 min — 6 pt

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan^2 x$. On note **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de *f* sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Tracer la courbe **C** dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) Soit (D) le domaine du plan limité par la courbe **C**, l'axe des abscisses et les droites : $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$.

a) Montrer que l'aire (en unité d'aire) du domaine (D) est : $1-\dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx=\dfrac{1}{3}$.

c) En déduire le volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine (D) autour de l'axe des abscisses.

3°) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $U_n\geq 0$.

www.takiacademy.com